

مقدمه مؤلف

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

الْعِلْمُ يُنَجِّدُ الْفِكْرَ: دانش، روشنی بخش اندیشه است. (امام علی علیه السلام)

زمانی که در کلاس‌های پیش‌دانشگاهی تدریس می‌کردم و در فرازهایی از تدریس، تأکید می‌نمودم که «این قسمت در امتحانات نهایی از اهمیت بالایی برخوردار است»، دانش‌آموزان اعتراض می‌نمودند که «آقا، پیزایی بگیر که در کنگور مهم باشه! هون امتحان نهایی رو هر بوری شده باشی می‌کنیم». بیان این جملات تناقض‌نما، روح هر معلمی را آزرده می‌کرد؛ از این جهت می‌گویم تناقض‌نما که آموختن هر جزء از درس‌های ریاضی، از واجبات است؛ چه برای آزمون‌های تشریحی و چه برای آزمون‌های چندگزینه‌ای؛ تا این که در اخبار سراسری شنیدم درصدی از امتیازات کنکور سراسری، وابسته به نمرات امتحان نهایی خواهد بود. صرف‌نظر از ایراداتی که بعضی کارشناسان به این طرح وارد می‌کنند، برای اغلب معلم‌ها، این خبر، مسرت‌بخش بود؛ زیرا به واسطه آن، اهمیت کلاس‌های دبیرستان بسیار افزایش خواهد یافت و دانش‌آموزان بهای بیشتری به این کلاس‌ها می‌دهند و علاوه بر این، دانش‌آموزی که با فشار بیش از حد به خودش در آزمون‌های چندگزینه‌ای، حداکثر ۲۰ تا ۲۵ درصد امتیاز آن را کسب می‌نمود، با کمی دقت در امتحان نهایی می‌تواند نمره خوبی کسب کند، طوری که دست‌کم ۹۰ درصد امتیاز آن را به دست آورد و بدین سبب درک او از مطالب درسی افزایش می‌یابد و در نتیجه درصد پاسخگویی او به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز افزایش خواهد یافت.

از این به بعد، مطمئن باشید که با کمی تلاش توأم با دقت، می‌توانید حدود ۳۰٪ از امتیازات کنکور را برای خودتان ذخیره کنید و این از نظر روانی به شما اطمینان خاطر القا می‌کند و هم‌چنین باعث افزایش امتیازتان در آزمون‌های چندگزینه‌ای نیز خواهد شد. در این کتاب سعی کرده‌ام تا تمام زوایای پنهان کتاب درسی را با ارائه سؤال مناسب، آشکار کنم. مثال‌های متن کتاب و تنوع آن‌ها به گونه‌ای است که تمام کتاب درسی را فرامی‌گیرد و چنان‌چه با دقت آن‌ها را دریافت کنید، نه تنها پاسخ به پرسش‌های کتاب درسی برایتان ساده خواهد شد، بلکه توانایی شما در پاسخ به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز افزایش خواهد یافت. تمرین‌های پایان هر درس که در سطوح مختلف طراحی شده‌اند، به تدریج باعث افزایش درک شما از درس خواهند شد؛ علاوه بر آن چون فهم شما از زاویه‌های مختلف آن مطلب بیشتر می‌شود، توانایی‌تان در پاسخ درست به پرسش‌های چندگزینه‌ای نیز شدیداً رشد خواهد کرد. در انتهای کتاب نیز شش آزمون که دوتا از آن‌ها برای نیم‌سال اول و چهارتای دیگر آن برای امتحان پایان سال می‌باشد، ارائه شده‌اند تا بتوانید سنجش مناسبی از خودتان داشته باشید.

در پایان از تمامی دست‌اندرکاران انتشارات محترم خیلی‌سبز به دلیل فراهم‌آوردن تسهیلات لازم در تهیه این کتاب، تشکر ویژه دارم، از ویراستاران گرامی که در تصحیح کتاب سهم بسزایی داشتند ممنونم، از خانم مریم طاهری به سبب پیگیری‌های توأم با مهربانی‌اش سپاس‌گزارم.



ماتریس و کاربردها

۷
۷
۱۶
۲۶
۳۳
۳۸
۴۳
۴۵

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس‌های خاص و جمع ماتریس‌ها
درس دوم: ضرب و توان ماتریس‌ها
درس سوم: دترمینان ماتریس‌های مربعی
درس چهارم: وارون ماتریس‌های مربعی
درس پنجم: حل دستگاه معادلات (دو معادله دو مجهولی) ...
آزمون جمع‌بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

۵۵
۵۵
۵۹
۶۶
۷۱
۸۲
۹۲
۹۴

آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی
درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
درس دوم: دایره
درس سوم: مسائل مربوط به نقطه، خط و دایره
درس چهارم: بیضی
درس پنجم: سهمی
آزمون جمع‌بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

بردارها

۱۰۹
۱۰۹
۱۱۲
۱۱۶
۱۱۹
۱۲۳
۱۲۵
۱۳۲
۱۳۹
۱۴۱

فصل سوم: بردارها

درس اول: یادآوری فضای \mathbb{R}^2
درس دوم: معرفی فضای \mathbb{R}^3
درس سوم: بررسی معادلات و نمودار مربوط به آن‌ها در فضای \mathbb{R}^3
درس چهارم: بردارها در فضای \mathbb{R}^3
درس پنجم: بردارها در فضای \mathbb{R}^3
درس ششم: ضرب داخلی دو بردار
درس هفتم: ضرب خارجی دو بردار
آزمون جمع‌بندی
پاسخ سؤال‌های امتحانی

شماره صفحه امتحان شماره صفحه پاسخ

۱۵۴	۱۵۳	امتحان شماره ۱: نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۵۹	۱۵۷	امتحان شماره ۲: نمونه امتحان نیم‌سال اول
۱۶۳	۱۶۱	امتحان شماره ۳: نمونه امتحان نیم‌سال دوم: (نهایی خردادماه ۱۴۰۱)
۱۶۷	۱۶۵	امتحان شماره ۴: نمونه امتحان نیم‌سال دوم: (نهایی خردادماه ۱۴۰۰)
۱۷۰	۱۶۸	امتحان شماره ۵: نمونه امتحان نیم‌سال دوم: (نهایی شهریورماه ۱۴۰۰)
۱۷۲	۱۷۱	امتحان شماره ۶: نمونه امتحان نیم‌سال دوم: (نهایی دی‌ماه ۱۴۰۰)

۴. ماتریس قطری

ماتریس مربعی را که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامند. (توجه داشته باشیم که درایه‌های روی قطر اصلی می‌توانند صفر باشند و می‌توانند مخالف صفر باشند.) در زیر، چند نوع ماتریس قطری آورده شده است:

$$A = [\Delta], \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۵. ماتریس اسکالر

اگر در یک ماتریس قطری، تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس اسکالر می‌نامند. در زیر، چند نوع ماتریس اسکالر آورده شده است:

$$A = [\Delta], \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+1 & n-1 \\ 2m & m+n-1 \end{bmatrix}$ قطری است. مقادیر m و n را بیابید.

پاسخ: ماتریس قطری، ماتریسی است که تمام درایه‌های غیر واقع بر از قطر اصلی آن صفر باشند؛ پس داریم:

$$n-1=0 \Rightarrow n=1$$

$$2m=0 \Rightarrow m=0$$

مثال: مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر از مرتبه ۳ مساوی ۶ است. این ماتریس را با درایه‌های مشخص کنید.

پاسخ: می‌دانیم که در ماتریس اسکالر درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابرند و بقیه درایه‌ها هم صفرند؛ پس داریم:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مجموع درایه‌ها}} a+a+a=6 \Rightarrow 3a=6 \Rightarrow a=2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۶. ماتریس واحد (ماتریس همانی)

یک ماتریس اسکالر را که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس واحد (ماتریس همانی) می‌نامند و با I نمایش می‌دهند.

در مقابل، دو نوع ماتریس واحد از مرتبه‌های مختلف نمایش داده شده‌اند:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۷. ماتریس صفر

ماتریسی را که تمام درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامند. معمولاً ماتریس صفر از مرتبه $n \times p$ را با نماد $\bar{O}_{n \times p}$ نمایش می‌دهند.

در زیر، چند ماتریس صفر نمایش داده شده‌اند:

$$\bar{O}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{O}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جمع‌بندی

مثال	نماد پارامتری	انواع ماتریس
$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	۱. ماتریس مربعی
$A_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $A_{1 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$	$A_{1 \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$	۲. ماتریس سطری

انواع ماتریس	نماد پارامتری	مثال
۳. ماتریس ستونی	$A_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$	$A_{r \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ $A_{f \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$
۴. ماتریس قطری	$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $A_{r \times r} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
۵. ماتریس اسکالر	$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}$	$A_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
۶. ماتریس همانی	$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	$I_{f \times f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
۷. ماتریس صفر	$\bar{O}_{n \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$	$O_{r \times r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A_{r \times f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس زمانی مساوی هستند که هر دو شرط زیر را داشته باشند:

الف دو ماتریس هم‌مرتبه باشند؛ یعنی تعداد سطر و نیز تعداد ستون آن‌ها با هم برابر باشد.

ب تمام درایه‌های نظیر به نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

برای مثال؛ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & y \\ 2z & 6 \end{bmatrix}$ که هم‌مرتبه هستند وقتی با هم برابرند که $x = a_{11} = 1$ ، $y = a_{22} = -1$ و $z = a_{31} = 4$ یا $z = 2$ باشد.

مثال: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x+2y & 1 \\ 2 & x^2+1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & x+2 \\ 2 & z+1 \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقادیر x ، y و z را پیدا کنید.

پاسخ: هر دو ماتریس از مرتبه 2×2 هستند، پس شرط اول تساوی دو ماتریس برقرار است. اکنون باید شرط دوم برقرار باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+2y=5 \xrightarrow{x=-1} y=3 \\ x+2=1 \Rightarrow x=-1 \\ z+1=x^2+1 \xrightarrow{x=-1} z=1 \end{cases}$$

$$A + (-A) = \bar{O}$$

توجه: حاصل جمع هر ماتریس با قرینه همان ماتریس، برابر ماتریس صفر از همان مرتبه است؛ یعنی:

نتیجه: اگر A ، ماتریسی از مرتبه $m \times n$ و \bar{O} نیز ماتریس صفر از مرتبه $m \times n$ باشد، آن گاه $A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$ ؛ یعنی ماتریس صفر، عضو بی اثر عمل جمع ماتریس‌ها است.

مثال: دو ماتریس 3×2 و ناصفر مثال بزنید که مجموع آن‌ها برابر ماتریس صفر باشد.

پاسخ: فرض کنیم A و B دو ماتریس 3×2 باشند، طوری که $A + B = \bar{O}_{3 \times 2}$ ، پس $B = \bar{O}_{3 \times 2} - A$ یا $B = -A$ ؛ یعنی کافی است

$$B = -A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ آن گاه } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ اگر تمام درایه‌های ماتریس } A \text{ را قرینه کنیم، بنابراین به عنوان نمونه؛}$$

ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر r و s دو عدد حقیقی و A ، B و C سه ماتریس از مرتبه $n \times p$ باشند، آن گاه ویژگی‌های زیر برقرار هستند:

ردیف	خاصیت	نمایش اختصاری	مثال
۱	خاصیت جابه‌جایی در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$A + B = B + A$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
۲	خاصیت شرکت‌پذیری در جمع ماتریس‌ها برقرار است.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right)$
۳	ماتریس صفر، عضو خنثی در عمل جمع است.	$A + \bar{O} = \bar{O} + A = A$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
۴	جمع هر ماتریس با قرینه خودش، برابر ماتریس صفر است.	$A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 0+0 \\ 1-1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
۵	ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک عدد در جمع (یا تفریق) ماتریس‌ها برقرار است.	$r.(A \pm B) = rA \pm rB$	$2 \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
۶	طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک عدد ضرب یا بر عددی ناصفر تقسیم کرد.	$A = B \xrightarrow{r \neq 0} rA = rB$ $kA = kB \xrightarrow{k \neq 0} A = B$	$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\div(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
۷	اگر حاصل ضرب یک عدد در ماتریس، برابر ماتریس صفر شود، یا آن عدد صفر است یا آن ماتریس، ماتریس صفر است.	$kA = \bar{O} \Rightarrow k = 0 \text{ یا } A = \bar{O}$	$0 \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $2 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
۸	ویژگی توزیع‌پذیری ضرب بردار در مجموع یا تفاضل دو عدد	$(r \pm s)A = rA \pm sA$	$(2+3) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه نشان دهید رابطه $A + (B + C) = (A + B) + C$ برقرار است.

$$B + C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 11 \\ 6 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 14 \\ 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 14 \\ 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow A + (B + C) = (A + B) + C$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ و $r = 3$ ، آن‌گاه نشان دهید: $r(A + B) = rA + rB$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ:

$$r(A + B) = 3 \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$rA = 3 \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, rB = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$rA + rB = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow r(A + B) = rA + rB$$

مثال: ویژگی جابه‌جایی جمع دو ماتریس؛ یعنی ویژگی (۱) از جدول صفحه قبل را ثابت کنید.

پاسخ: فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ و $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ، بنا بر تعریف جمع دو ماتریس هم‌مرتبه داریم:

$$A + B = [a_{ij}]_{n \times p} + [b_{ij}]_{n \times p}$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times p} \quad \text{بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس}$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{ویژگی جابه‌جایی عمل جمع در مجموعه اعداد حقیقی}$$

$$= [b_{ij}]_{n \times p} + [a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{بنا به تعریف عمل جمع ماتریس‌ها}$$

$$= B + A$$

مثال: ویژگی توزیع‌پذیری ضرب یک ماتریس در جمع دو عدد حقیقی؛ یعنی ویژگی (۸) را ثابت کنید.

پاسخ: فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{n \times p}$ یک ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. اکنون داریم:

$$(r + s) \cdot A = (r + s) \cdot [a_{ij}]_{n \times p}$$

$$= [(r + s) \cdot a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{بنا بر تعریف ضرب عدد در یک ماتریس}$$

$$= [r \cdot a_{ij} + s \cdot a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{ویژگی توزیع‌پذیری ضرب در جمع در مجموعه اعداد حقیقی}$$

$$= [r \cdot a_{ij}]_{n \times p} + [s \cdot a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{بنا به تعریف عمل جمع دو ماتریس}$$

$$= r \cdot [a_{ij}]_{n \times p} + s \cdot [a_{ij}]_{n \times p} \quad \text{بنا بر تعریف ضرب عدد در ماتریس}$$

$$= r \cdot A + s \cdot B$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

گفتیم اگر A ماتریس سطری از مرتبه $1 \times n$ و B ماتریس ستونی از مرتبه $n \times 1$ باشد، آن گاه ضرب A در B تعریف پذیر است و حاصل آن ماتریسی از مرتبه 1×1 می باشد که معادل با یک عدد حقیقی است. برای پیدا کردن حاصل ضرب $A \times B$ هر درایه از ماتریس A مانند a_{ij} را در درایه b_{ij} از ماتریس B ضرب می کنیم و مجموع این حاصل ضرب ها را به دست می آوریم.

به عنوان مثال؛ اگر $A = [4 \quad 5 \quad -2]_{1 \times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ ، آن گاه داریم:

$$A \times B = [4 \quad 5 \quad -2] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [4 \times 3 + 5 \times 2 + (-2) \times 1]_{1 \times 1} = [20]_{1 \times 1} = 20$$

و به طور کلی اگر $A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]_{1 \times n}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1}$ باشند، آن گاه داریم:

$$A \times B = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]_{1 \times n} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}_{n \times 1} = [a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}]_{1 \times 1}$$

$$= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

ضرب ماتریس در ماتریس

فرض کنید دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ داده شده باشند. برای محاسبه حاصل ضرب $C = A \times B$ باید هر یک از سطرهاى A را در تک تک ستون های B ضرب کرده و در جای خودش بنویسیم. بنابراین در این مثال از ماتریس اول، یعنی A سطر اول را $[1 \quad -2]$ و از

ماتریس دوم، یعنی B ستون اول را در نظر می گیریم $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ و درایه های سطر اول A و ستون اول B را نظیر به نظیر در هم ضرب می کنیم و سپس اعداد به دست آمده را جمع می کنیم. عدد حاصل، درایه سطر اول و ستون اول ماتریس C ، یعنی c_{11} است حالا سطر اول A را در ستون دوم B ضرب می کنیم تا درایه c_{12} به دست آید. همین اعمال را برای سطر دوم و هم چنین برای سطر سوم A اجرا می کنیم. خواهیم داشت:

$$c_{11} = 1 \times (-1) + (-2) \times (-2) = 3$$

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} = 1 \times (-1) + (-2) \times (-2) & c_{12} = 1 \times 0 + (-2) \times (2) \\ c_{21} = 3 \times (-1) + 2 \times (-2) & c_{22} = 3 \times 0 + 2 \times 2 \\ c_{31} = (-1) \times (-1) + 0 \times 0 & c_{32} = -1 \times 0 + 0 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = C_{3 \times 2}$$

نکته

برای پیدا کردن درایه سطر i ام، ستون j ام ماتریس حاصل ضرب، باید سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ، آیا ماتریس $A \times B$ وجود دارد؟ چرا؟ اگر جواب مثبت است، ماتریس حاصل ضرب

را پیدا کنید.

پاسخ: مرتبه ماتریس A ، 3×3 و ماتریس B ، 3×2 است. چون تعداد ستون های ماتریس اول با تعداد سطرهاى ماتریس دوم، برابر است، پس ماتریس $A \times B$ تعریف پذیر است و ماتریس حاصل ضرب از مرتبه 3×2 است.

اکنون هر یک از سطرهاى ماتریس A را در هر یک از ستون‌های ماتریس B ضرب می‌کنیم: (اگر سطر i ام ماتریس A را در ستون j ام ماتریس B ضرب کنیم، آن‌گاه حاصل آن، درایهٔ سطر i ام، ستون j ام از ماتریس حاصل ضرب است)

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 4 + (-1) \times 3 & 2 \times 5 + 3 \times (-2) + (-1) \times 0 \\ 0 \times 1 + 2 \times 4 + 4 \times 3 & 0 \times 5 + 2 \times (-2) + 4 \times 0 \\ 2 \times 1 + 1 \times 4 + 0 \times 3 & 2 \times 5 + 1 \times (-2) + 0 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 20 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ باشد، مقدار x را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا دو ماتریس سمت چپ را در هم ضرب می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3x \\ 1 + x \\ 3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3x \\ 1 + x \\ 4 \end{bmatrix}$$

حالا حاصل را در ماتریس سمت راست ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3x & 1 + x \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [3(2 + 3x) + 1(1 + x)] = 0 \Rightarrow [16x + 7] = 0$$

$$16x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{16}$$

اما هر ماتریس 1×1 متناظر با درایهٔ آن است، پس:

تذکر: توجه کنید که ضرب دو ماتریس در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی نیست؛ یعنی گاهی $A \times B$ قابل تعریف است ولی $B \times A$ قابل تعریف نیست و حتی گاهی $A \times B$ و $B \times A$ هر دو تعریف پذیرند ولی با هم برابر نیستند.

ویژگی‌های عمل ضرب ماتریس‌ها

ویژگی (۱): در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

ویژگی (۲): اگر A ، ماتریس $n \times n$ و I ماتریس واحد از همان مرتبه باشد، آن‌گاه A و I تعویض پذیر هستند؛ یعنی داریم: $A \times I = I \times A = A$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ و I ماتریس همانی 2×2 باشد، نشان دهید $A \times I = I \times A = A$.

$$A \times I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 0 & 2 \times 0 + 4 \times 1 \\ 3 \times 1 - 5 \times 0 & 3 \times 0 - 5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = A \quad (1)$$

$$I \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 4 + 0 \times (-5) \\ 0 \times 2 + 1 \times 3 & 0 \times 4 + 1 \times (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = A \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A \times I = I \times A = A$$

مثال: ماتریس دلخواهی از مرتبهٔ 3×3 مانند A را در نظر بگیرید. حاصل $A \times I_3$ و $I_3 \times A$ را پیدا کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A \times I_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A$$

پاسخ: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ، پس داریم:

$$I_3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = A$$

هم‌چنین داریم:

نتیجه می‌شود ماتریس I_3 ، عضو بی‌اثر عمل ضرب ماتریس‌ها از مرتبهٔ 3×3 است و هم‌چنین به گونه‌ای استثنایی دارای ویژگی جابه‌جایی نیز می‌باشد.

۱. روش بسط ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. دترمینان این ماتریس با روش بسط براساس سطر اول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

یعنی هر درایه از سطر اول مانند a_{1j} در $(-1)^{1+j}$ ضرب کرده و سپس آن را در دترمینان ماتریس 2×2 حاصل از حذف سطر و ستونی که درایه روی آن قرار دارد، ضرب و سپس تمام عددهای به دست آمده را با هم جمع جبری می‌کنیم. حال اگر بخواهیم دترمینان را براساس ستون دوم پیدا کنیم، داریم:

$$|A| = a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

مثال: اگر بدانیم $\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ ، آن‌گاه مقدار a را پیدا کنید.

پاسخ: واضح است که $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5a + 1$. حالا دترمینان ماتریس 3×3 را براساس سطر اول پیدا می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (6 - 4) - 3 \times (3 - 12) + a \times (1 - 6) = -5a + 31$$

$$-5a + 31 = 5a + 1 \Rightarrow -10a = -30 \Rightarrow a = 3$$

چون این دو دترمینان باید برابر باشند، داریم:

توجه: دترمینان یک ماتریس 3×3 براساس هر سطر یا هر ستون جواب یکسان دارد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را یک بار براساس سطر دوم و یک بار هم براساس ستون سوم بسط دهید و نتایج حاصل را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: ابتدا دترمینان را براساس سطر دوم بسط می‌دهیم:

$$|A| = -3 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \times (-1) \times (15 - 8) + 2 \times 1 \times (10 - 12) + 1 \times (-1) \times (4 - 9) = 21 - 4 + 5 = 22$$

اکنون براساس ستون سوم، دترمینان را محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = 4 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 1 \times (-6 - 6) + 1 \times (-1) \times (4 - 9) + 5 \times 1 \times (4 + 9)$$

$$= -48 + 5 + 65 = 22$$

ملاحظه می‌کنید، همان‌گونه که انتظار داشتیم، هر دو روش جوابی یکسان داشتند.

تذکره: هر چند محاسبه دترمینان یک ماتریس 3×3 براساس هر سطر یا هر ستون به نتیجه‌ای یکسان خواهد رسید ولی اگر سطر یا ستونی تعداد درایه‌های صفر آن بیشتر باشد، محاسبه دترمینان براساس آن سطر یا ستون ساده‌تر صورت می‌گیرد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

پاسخ: چون ستون دوم، دارای دو درایهٔ صفر است، راحت‌تر آن است که دترمینان را براساس ستون دوم محاسبه کنیم، پس داریم:

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -2 \times (28 - 30) = 4$$

۲. روش ساروس این روش فقط برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3 مورد استفاده دارد و مراحل محاسبهٔ آن به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

مرحله اول: دو ستون اول و دوم را به همین ترتیب بعد از ستون سوم کنار آن می‌نویسیم:

مرحله دوم: درایه‌هایی را که روی قطر اصلی هستند در هم ضرب می‌کنیم و هم‌چنین هر سه درایه‌ای را که روی خطی موازی با قطر اصلی و در سمت راست آن قرار دارند در یکدیگر ضرب و عددهای حاصل را با هم جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$M = aei + bfg + cdh$$

مرحله سوم: درایه‌هایی را که روی قطر فرعی هستند در هم ضرب می‌کنیم و هم‌چنین هر سه درایه‌ای را که روی خطی موازی با قطر فرعی و در سمت راست آن واقع‌اند در یکدیگر ضرب و آن‌ها را نیز با هم جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$N = ceg + afh + bdi$$

مرحله چهارم: حالا عدد حاصل از مرحلهٔ (۳) را از عدد حاصل از مرحلهٔ (۲) کم می‌کنیم، عددی که به دست می‌آید دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ است؛ یعنی $|A| = M - N$.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را با روش ساروس محاسبه کنید و حاصل را با آن‌چه که در مثال قبلی به دست آمد مقایسه کنید.

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \end{array}$$

پاسخ:

$$|A| = (20 + 9 - 24) - (24 + 4 - 45) = 5 - (-17) = 22$$

ملاحظه می‌کنید که نتیجهٔ حاصل با آن‌چه که از مثال قبلی به دست آمد یکسان است.

۳. روش مثلثی این روش، به نوعی همان روش ساروس می‌باشد که در آن نیازی به نوشتن دو ستون اضافی نیست و به صورت زیر است:

مرحله اول: درایه‌های قطر اصلی را در هم ضرب می‌کنیم و سپس دو عددی که موازی قطر اصلی هستند را در دورترین درایه نسبت به آن ضرب می‌کنیم (یعنی $d \times h$ را در c و $b \times f$ را در g ضرب می‌کنیم) و هر سه را جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \Rightarrow M = aei + dhc + gbf$$

مرحله دوم: همین اعمال را برای قطر فرعی انجام می‌دهیم و هر سه را جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \Rightarrow N = ceg + bdi + afh$$

مرحله سوم: حالا حاصل مرحلهٔ (۲) را از مرحلهٔ (۱) کم می‌کنیم. عدد به دست آمده دترمینان ماتریس $A_{3 \times 3}$ است؛ یعنی: $|A| = M - N$

تذکره: هر چند در نگاه اول، این روش مناسب به نظر نمی‌رسد ولی با چند بار اجرا کردن آن، سهولت کار برایتان روشن خواهد شد.

تذکره: واضح است که $|A| = 0$ هم‌ارز با معادله $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ است، پس برای تشخیص در حالت موازی و متمایز بودن یا منطبق بودن دو خط، کافی است یک نقطه دلخواه روی یکی از دو خط انتخاب کنیم. اگر این نقطه روی خط دیگر صدق کند، آن دو خط منطبق‌اند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد و اگر صدق نکرد، دو خط موازی و متمایزند و دستگاه جواب ندارد.

مثال: اگر دستگاه $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 2x + my = 7 \end{cases}$ فقط یک جواب داشته باشد، آن‌گاه m چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

پاسخ: یک دستگاه دو معادله دوجمله‌ای، زمانی یک جواب منحصربه‌فرد دارد که دو خط تشکیل‌دهنده آن، متقاطع باشند و این زمانی است که دترمینان ماتریس ضرایب، مخالف صفر باشد، پس باید داشته باشیم: $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 3m + 10 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{10}{3}$
 پس اگر m هر عددی حقیقی به جز $-\frac{10}{3}$ باشد، آن‌گاه دستگاه موردنظر دارای جواب منحصربه‌فرد است.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 3 \end{cases}$$

مثال: دربارهٔ تعداد جواب‌های دستگاه روبه‌رو، بدون حل آن، تحقیق کنید:

پاسخ: ماتریس ضرایب این دستگاه $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ است و دترمینان آن $|A| = 0$ است، پس دو خطی که معادلات این دستگاه را تشکیل می‌دهند موازی با یکدیگر هستند.
 اگر این دو خط، موازی و متمایز باشند، دستگاه جواب ندارد و اگر این دو خط بر هم منطبق باشند، آن‌گاه مسئله بی‌شمار جواب دارد.
 برای تشخیص این دو حالت از یکدیگر، کافی است یک نقطه از یکی از دو خط را اختیار کنیم؛ اگر این نقطه در معادلهٔ خط دیگر صدق کند، دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد ولی در غیر این صورت دستگاه جواب ندارد.
 با کمی دقت می‌توان پی برد که به عنوان مثال؛ نقطه $B(1, 1)$ در معادلهٔ خط اول صدق می‌کند ولی این نقطه در معادلهٔ خط دوم صدق نمی‌کند، پس این دو خط، موازی و متمایز هستند و دستگاه جواب ندارد.

نکته

دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

- ۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آن‌گاه دستگاه دارای جواب منحصربه‌فرد است. (در واقع شیب‌های دو خط، نابرابر هستند، در نتیجه دو خط در یک نقطه متقاطع‌اند).
 - ۲) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دو خط بر هم منطبق هستند و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.
 - ۳) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آن‌گاه دو خط با هم موازی و متمایزند و دستگاه جواب ندارد.
- در مثال قبل داریم $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} \neq \frac{1}{3}$ ، پس با توجه به بند ۳ از نکتهٔ فوق، این دستگاه دارای جواب نیست.

جمع‌بندی

تعداد نقاط مشترک	شکل	وضعیت دترمینان ماتریس ضرایب	وضعیت شیب‌ها	وضعیت دو خط
۱		$ A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$	$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	متقاطع‌اند.
۰		$ A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	موازی و متمایزند
بی‌نهایت		$ A = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	منطبق‌اند.



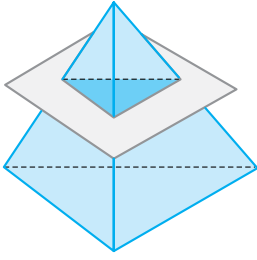
آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل دوم

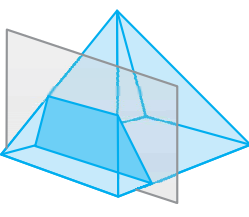
آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی



در هندسه (۱) با مفهوم برش و سطح مقطع آشنا شدیم و آموختیم که سطح مقطع هر صفحه با یک جسم فضایی، شکل مسطحی است که از برخورد آن صفحه با جسم فضایی پدید می‌آید؛ به عنوان مثال، اگر هرمی با قاعده مثلث (هرم چهاروجهی) را با صفحه‌ای که موازی یکی از وجه‌های آن است و از رأس هرم نمی‌گذرد قطع دهیم، شکل مقطع، همان‌گونه که در شکل (الف) مشاهده می‌کنید، یک مثلث می‌باشد و اگر هرمی قائم با قاعده مربع را با صفحه‌ای که موازی محور هرم است، ولی این صفحه از رأس هرم نمی‌گذرد برش دهیم، همان‌گونه که در شکل (ب) دیده می‌شود شکل حاصل از برش، یک دوزنقه متساوی‌الساقین است.



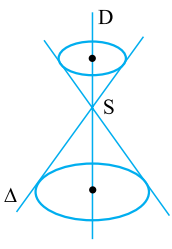
(الف)



(ب)

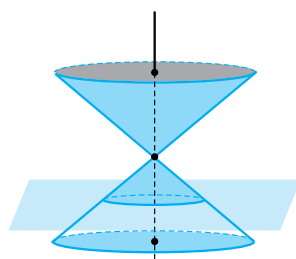
اکنون می‌خواهیم مقطع یک صفحه با رویه‌ای مخروطی را در حالات مختلف مشخص کنیم؛ برای این منظور باید ابتدا رویه مخروطی را بشناسیم.

رویه مخروطی

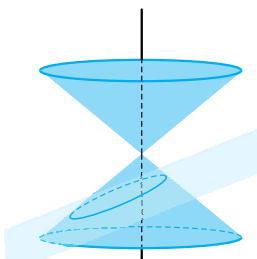


دو خط D و Δ را در فضا که در نقطه S متقاطع‌اند در نظر بگیرید. اگر خط Δ حول خط D یک دور کامل کند، شکلی که حاصل می‌شود را «رویه مخروطی» می‌نامند. S را رأس رویه مخروطی، D را محور رویه مخروطی و تمام خط‌هایی را که از رأس می‌گذرند و بر دایره بالا و پایین (قاعدہ‌ها) متکی‌اند (مثل خط Δ)، مولدهای رویه مخروطی می‌نامند. توجه داشته باشیم که رویه مخروطی از هر دو طرف رأس آن تا بی‌نهایت ادامه دارد.

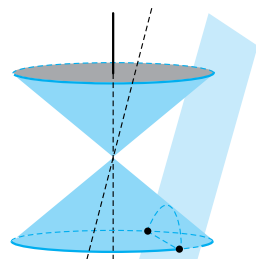
مقطع‌های رویه مخروطی با یک صفحه در حالت‌های مختلف



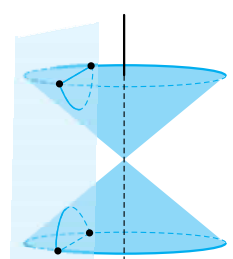
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

اگر یک رویه مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، در حالت‌های مختلف، شکل مقطع متفاوت به وجود می‌آیند:

الف اگر صفحه‌ای عمود بر محور رویه مخروطی باشد که از رأس آن نگذرد، مقطع آن صفحه با رویه مخروطی، یک دایره است. هر چه قدر فاصله این صفحه از رأس بیشتر باشد، شعاع دایره مقطع بزرگ‌تر است.

ب اگر صفحه‌ای نه عمود بر محور و نه موازی با آن باشد و هم‌چنین با هیچ‌یک از مولدهای آن موازی نباشد و از رأس نیز نگذرد، مقطع آن صفحه با رویه مخروطی، یک بیضی است. هر چه قدر فاصله این صفحه از رأس بیشتر باشد، قطرهای بزرگ و کوچک بیضی حاصل نیز بزرگ‌تر هستند.

پ اگر صفحه‌ای با یکی از مولدهای رویه مخروطی، موازی باشد و از رأس هم نگذرد، مقطع آن، یک منحنی به نام سهمی است.

ت اگر صفحه‌ای بعضی از مولدهای رویه مخروطی را در یک طرف رأس و بقیه مولدها را در طرف دیگر آن قطع کند، منحنی مقطع، دارای دو شاخه است که آن را هذلولی می‌نامند.

نکته

اگر صفحه برش، از رأس رویه مخروطی بگذرد، با توجه به زاویه صفحه سه حالت مختلف اتفاق می‌افتد:

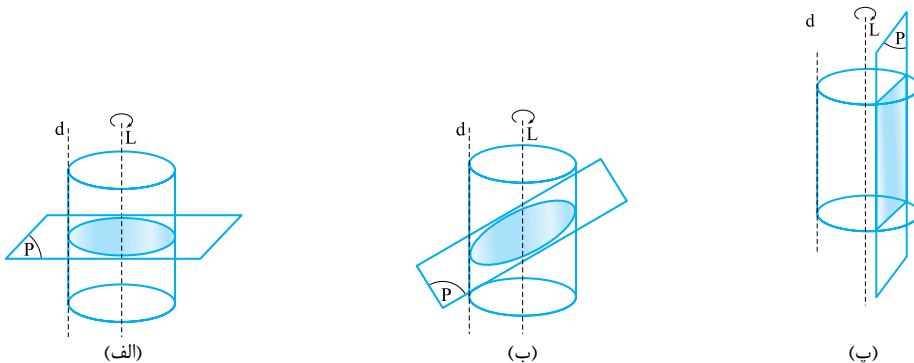
حالت	(۱) صفحه عمود بر محور باشد.	(۲) صفحه از مولد بگذرد.	(۳) صفحه شامل محور باشد.
شکل			
سطح مقطع	یک نقطه	یک خط	دو خط متقاطع

مثال: فرض کنیم دو خط d و L موازی باشند. اگر d را حول خط ثابت L دوران دهیم، شکلی هندسی پدید می‌آید که آن را «سطح استوانه‌ای» می‌نامند. صفحه‌ای دلخواه در نظر بگیرید که این سطح استوانه‌ای را قطع می‌کند. در حالت‌های مختلف درباره شکل سطح مقطع، بحث کنید.

پاسخ: الف) خط L همان محور سطح استوانه‌ای است. اگر صفحه P بر محور L عمود باشد، مقطع یک دایره است.

ب) اگر صفحه P بر محور L عمود نباشد ولی آن را قطع کند، مقطع یک بیضی است.

پ) اگر صفحه P با محور L موازی باشد و سطح استوانه‌ای را قطع کند، مقطع یک مستطیل است.

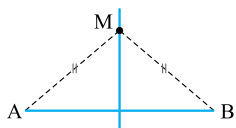


مکان هندسی

مجموعه همه نقاطی که دارای «ویژگی مشترکی» هستند، به طوری که هر نقطه از این مجموعه، دارای آن ویژگی باشد و هر نقطه که دارای آن ویژگی است، عضوی از این مجموعه باشد، «مکان هندسی» نامند. به عنوان مثال؛ به چند مکان هندسی پرکاربرد در ادامه توجه کنید:

چند مکان هندسی معروف


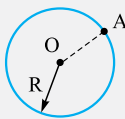
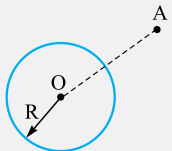
۱. **عمود منصف پاره خط AB** در یک صفحه، مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است، خط



عمود منصف پاره خط AB می‌باشد.

وضعیت نسبی یک نقطه با یک دایره

هر دایره، صفحه را به سه بخش جدا از هم تقسیم می‌کند. یک بخش آن، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره می‌باشند، این نقطه‌ها را نقطه‌های درونی دایره می‌نامند. (شکل الف) بخش دوم، نقطه‌هایی از صفحه هستند که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره‌اند، این نقطه‌ها را محیط دایره می‌نامند (شکل ب) و بخشی از صفحه که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره هستند، این بخش را نقطه‌های بیرونی دایره می‌نامند. (شکل پ)

الف) نقطه درون دایره	ب) نقطه روی دایره	پ) نقطه بیرون دایره
 $OA < R$	 $OA = R$	 $OA > R$
در این حالت، فاصله نقطه از مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.	در این حالت، فاصله نقطه از مرکز دایره، برابر با شعاع دایره است.	در این حالت، فاصله نقطه از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

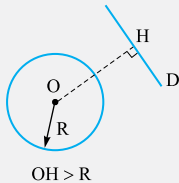
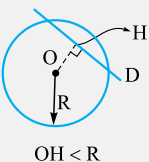
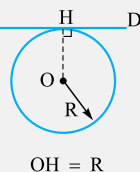
مثال: معادله دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ است. وضعیت نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به این دایره مشخص کنید.

پاسخ: مرکز دایره، نقطه $O(-1, 2)$ و شعاع آن $R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4 \times (-4)} = 3$ است. از طرفی فاصله نقطه A از مرکز دایره، برابر $AO = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2} = 2$ می‌باشد؛ چون $AO = 2 < R = 3$ است، پس نقطه A درون دایره قرار دارد.

تذکره مهم: اگر معادله دایره‌ای به صورت $C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد، چنانچه بخواهیم وضعیت نقطه $A(x_1, y_1)$ را نسبت به این دایره مشخص کنیم، کافی است مختصات این نقطه را در معادله بگذاریم؛ یعنی حاصل $C(x_1, y_1) = x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c$ را پیدا کنیم، اگر این مقدار مثبت باشد، نقطه A بیرون دایره است و اگر این مقدار برابر صفر باشد، روی دایره و چنانچه منفی باشد، نقطه A درون دایره قرار دارد. در مثال بالا داریم $0 < -5 = C(1, 2) = 1^2 + 2^2 + 2 \times 1 - 4 \times 2 - 4 = -5$ ، در نتیجه این نقطه درون دایره می‌باشد.

اوضاع نسبی خط و دایره

دایره C به مرکز O و شعاع R را در نظر بگیریم، هر خط مانند D با دایره C یکی از سه حالت زیر را دارد:

الف) خط D دایره را قطع نمی‌کند.	ب) خط D دایره را قطع می‌کند.	پ) خط D بر دایره مماس است.
 $OH > R$	 $OH < R$	 $OH = R$
در این حالت، فاصله مرکز دایره، از خط D بیشتر از شعاع دایره است.	در این حالت، فاصله مرکز دایره، از خط D کم‌تر از شعاع دایره است	در این حالت، فاصله مرکز دایره، از خط D (خط مماس) برابر با شعاع دایره است.

یادآوری: برای به دست آوردن طول OH یعنی فاصله مرکز دایره تا خط D ، از فرمول فاصله نقطه از خط استفاده می‌کنیم.

یادآوری می‌شود که فاصله نقطه $O(\alpha, \beta)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

را به هم وصل می‌کند (خط‌المركزین دو دایره) برابر $\sqrt{1^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$ است. اگر شعاع دایره موردنظر را R بگیریم، چون می‌خواهیم دو دایره بر هم مماس خارج باشند، باید داشته باشیم $OO' = R + R'$ یا $\sqrt{10} = R + 2$ و در نتیجه $R = \sqrt{10} - 2$ ، بنابراین، معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{10}-2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9 + 4\sqrt{10} = 0$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(2,1)$ باشد و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 = 4$ مماس داخل باشد.

پاسخ: مرکز دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، نقطه $O'(0,0)$ و شعاع آن $R' = 2$ است.

طول خط‌المركزین دو دایره را پیدا می‌کنیم:
چون دو دایره مماس داخل هستند، پس باید طول خط‌المركزین برابر با قدرمطلق تفاضل دو شعاع باشد:

$$OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{5} = |R - 2| \Rightarrow R - 2 = \pm\sqrt{5}$$

از $R - 2 = -\sqrt{5}$ نتیجه می‌شود $R = 2 - \sqrt{5} < 0$ و در این صورت دایره‌ای وجود ندارد. از $R - 2 = \sqrt{5}$ نتیجه می‌شود $R = 2 + \sqrt{5} > 0$ و در این صورت معادله دایره به صورت زیر است:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2+\sqrt{5})^2 \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 - 4\sqrt{5} = 0$$

در امتحان نهایی چه خبر؟

معمولاً به بخش «مسائل مربوط به نقطه، خط و دایره»، در امتحان‌های نهایی توجه ویژه می‌شود. ببینید:

تیپ ۱: وضعیت نسبی نقطه و دایره: در این سوالات یک یا چند نقطه می‌دهند و ما باید مشخص کنیم که روی دایره، داخل یا خارج از آن است. در مورد روش حل این سؤال به درس‌نامه مراجعه کنید.

حالاتو حل کن: سؤال ۳۳ بخش (الف) / سؤال ۳۴ بخش (الف) / سؤال‌های ۳۵ و ۳۶

تیپ ۲: وضعیت نسبی خط و دایره: در مورد خط‌های خارج، مماس و یا متقاطع با دایره هم در درس‌نامه مفصل توضیح دادیم. تعداد نقاط اشتراک خط و دایره هم جزء این تیپ سؤال قرار می‌گیرد.

حالاتو حل کن: سؤال ۳۳ بخش (ب) / سؤال ۳۴ بخش (ب) / سؤال‌های ۳۷ تا ۴۵

تیپ ۳: در این تیپ یک نقطه و معادله دایره را می‌دهند و معادله خط مماس بر دایره را می‌خواهند.

روش حل: برای نوشتن معادله یک خط به یک نقطه و شیب خط احتیاج داریم. مختصات نقطه که در صورت سؤال هست. شیب خط هم معکوس و قرینه شیب قطر دایره در نقطه تماس است. چرا؟

حالاتو حل کن: سؤال ۴۶

تیپ ۴: وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم: دو دایره در ۶ وضعیت نسبت به یکدیگر می‌تواند قرار بگیرند و این تیپ سؤال بسیار مورد علاقه طراحان امتحان نهایی است.

گاهی این تیپ سؤال با سؤال‌های به دست آوردن معادله دایره ترکیب می‌شود.

حالاتو حل کن: سؤال ۳۳ بخش (ب) / سؤال ۳۴ بخش (ب) و (ت) / سؤال‌های ۴۷ تا ۵۳

سؤال‌های امتحانی

۳۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) نقطه $(2, -3)$ روی دایره $x^2 + y^2 + 2x = 0$ قرار دارد.

(ب) دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 - 4x = 0$ و $x^2 + y^2 + 4y = 0$ متخارج هستند.

(پ) خط به معادله $x + y = 5$ ، دایره $x^2 + y^2 = 9$ را قطع می‌کند.

۳۴- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید:

(نهایی فرورد ۱۴۰۱)

الف) نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد.

ب) اگر خط $3x + 4y + 8 = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 + 2x = a$ مماس باشد، مقدار a برابر با است.

پ) دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 6x = 0$ و $x^2 + y^2 - 8y = 0$ نسبت به یکدیگر هستند.

ت) اگر دو دایره $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 - 8x = a$ بر یکدیگر مماس خارج باشند، مقدار a برابر با است.

۳۵- وضعیت نسبی دو نقطه $A(1, 0)$ و $B(2, -5)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - x + 3y = 4$ مشخص کنید.

(نهایی فرورد ۹۹)

۳۶- وضعیت نقطه $A(1, -2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.

(نهایی شهریور ۹۸)

۳۷- وضعیت خط $x + y = 2$ و دایره $x^2 + y^2 = 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.

(نهایی دی ۹۸)

۳۸- وضعیت خط $3x + y = 0$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ مشخص کنید.

(نهایی شهریور ۹۹)

۳۹- وضعیت خط $x - y - 1 = 0$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۴۰- به ازای چه مقدار a ، دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

۴۱- اگر خط $y + x = k$ دایره $x^2 + y^2 - 2x = 1$ را در دو نقطه متمایز قطع کند، حدود k را به دست آورید.

۴۲- اگر خط $y = mx$ بر دایره $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$ مماس باشد، حدود m چیست؟

۴۳- خط $x + ky = 2$ دایره $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله این دو نقطه چه قدر است؟

۴۴- دو خط $2x + y - 2 = 0$ و $x - 2y - 1 = 0$ را به ترتیب در A' ، A ، B' و B قطع می‌کنند. محیط چهارضلعی $ABA'B'$ را بیابید.

۴۵- اگر خط $3x + my + m - 4 = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ مماس باشد، مقدار m را به دست آورید.

۴۶- در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

(نهایی فرورد ۹۸، شهریور ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۰)

۴۷- دایره‌های $x^2 + y^2 - 2x = 4$ و $x^2 + y^2 = 4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

(نهایی دی ۹۷)

۴۸- وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

(نهایی دی ۹۹)

۴۹- وضعیت دایره $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ با دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

(نهایی فرورد ۱۴۰۰)

۵۰- مقدار m را چنان بیابید که دو دایره $x^2 + y^2 + 2x + 2y - m = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 16 = 0$ بر یکدیگر مماس خارج باشند.

۵۱- وضعیت نسبی دایره‌ای به مرکز $O(3, 1)$ که بر خط $y = \frac{-4}{3}x + \frac{5}{3}$ مماس است با دایره $x^2 + y^2 + 4x = 0$ چگونه است؟

(نهایی دی ۹۸)

۵۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2, -2)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ مماس خارج باشد.

(نهایی شهریور ۹۹)

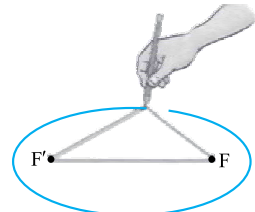
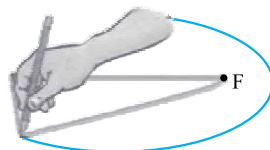
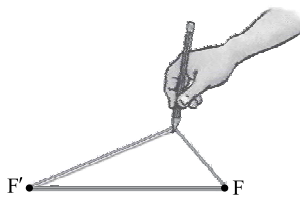
۵۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0, 1)$ باشد و با دایره به معادله $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$ مماس داخل باشد.

۴ بیضی

چگونه یک بیضی رسم کنیم؟ روی یک صفحه مسطح دو پونز در دو نقطه ثابت F و F' نصب کنید و نخ بسته‌ای را که کشسان نباشد و طول

کل نخ از دو برابر فاصله F و F' بیشتر باشد دور این دو پونز حلقه کنید و قلم را روی نخ تکیه داده طوری که نخ به حالت کشیده درآید و سپس

قلم را حرکت دهید. شکلی که نوک قلم بر صفحه پدید می‌آورد، بیضی نامیده می‌شود.



اگر بدون تغییر طول نخ، جای دو پونز را تغییر دهیم، آن‌گاه بیضی‌های متفاوت به دست می‌آیند. در این صورت هر چه قدر فاصله دو پونز کم‌تر باشد، آن‌گاه بیضی حاصل به دایره شبیه‌تر است و هر چه قدر فاصله دو پونز بیشتر باشد، بیضی کشیده‌تر خواهد بود.



بیضی کشیده‌تر



بیضی شبیه به دایره

به دست می‌آیند، همنهشت هستند، مسئله در واقع یک جواب دارد.

اگر دایره، بر بیضی در دو نقطه مماس باشد، مسئله به ظاهر، دارای ۲ جواب است ولی چون دو مثلثی که پدید می‌آیند همنهشت هستند، باز هم مسئله یک جواب دارد.

اگر دایره و بیضی نقطه مشترک نداشته باشند، آن‌گاه مسئله جواب ندارد.

در امتحان نهایی چه خبر

در این جا می‌خواهیم از پرکارترین سوالات امتحان نهایی از بخش «بیضی» صحبت کنیم. پیشنهاد می‌کنم بعد از خواندن هر تیپ سؤال و روش حل آن به سراغ سؤال‌های بخش **حالات ممکن** بروید:

تیپ ۱: اولین و ساده‌ترین تیپ سؤال‌های بیضی در مورد تعاریف اولیه یا همان پارامترهای بیضی است؛ یعنی سؤال از ما طول قطرها، فاصله کانونی و ... را می‌خواهد. در این سؤالات از رابطه اصلی بین پارامترهای بیضی یعنی $a^2 = b^2 + c^2$ زیاد استفاده می‌شود.

حالات ممکن: سؤال ۵۵ بخش (ث) / سؤال‌های ۵۶ و ۵۷ / سؤال‌های ۶۳ تا ۷۰ / سؤال‌های ۸۰ و ۸۱

تیپ ۲: دومین تیپ در مورد خروج از مرکز بیضی است. یک سری از ویژگی‌های بیضی را می‌دهد و $e = \frac{c}{a}$ را می‌خواهد یا برعکس. این تیپ سؤال بسیار پرکاربرد ولی ساده است.

حالات ممکن: سؤال ۵۴ بخش (الف)، (ب) و (پ) / سؤال ۵۵ بخش (الف)، (پ) و (ج) / سؤال‌های ۵۸ تا ۶۲

تیپ ۳: این تیپ در مورد نقاط داخل، خارج و روی بیضی است. باید بدانید که مجموع فاصله هر نقطه روی بیضی از کانون‌ها برابر قطر بزرگ بیضی است.

حالات ممکن: سؤال ۵۴ بخش (ث) / سؤال ۵۵ بخش (ب) / سؤال‌های ۷۱ و ۷۲

$$MN' = \frac{2b^2}{a}$$

تیپ ۴: در مورد وتر کانونی بیضی است که اندازه آن برابر است با:

حالات ممکن: سؤال ۵۴ بخش (ج) / سؤال‌های ۷۳ تا ۷۵

تیپ ۵: خط مماس بر بیضی در مورد ویژگی‌های این تیپ سؤالات در درس‌نامه کامل توضیح دادیم.

حالات ممکن: سؤال ۵۴ بخش (ج) / سؤال‌های ۷۶ تا ۷۸ / سؤال ۸۲

تیپ ۶: این تیپ سؤال در مورد خاصیت بازتابندگی بیضی است. همین که اگر پرتو نوری از یک کانون بر بیضی بتابد، پرتوی بازتاب آن حتماً از کانون دیگر بیضی عبور می‌کند.

حالات ممکن: سؤال ۵۴ بخش (ت) / سؤال ۵۵ بخش (ت) / سؤال ۸۳

تیپ ۷: و تیپ آخر سؤالات بیضی در مورد ترکیب دایره و بیضی است.

حالات ممکن: سؤال‌های ۸۴ تا ۸۶

سؤال‌های امتحانی

۵۴- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:

(نهایی دی ۹۸ و دی ۱۴۰۰)

(الف) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره خط می‌شود.

(نهایی فرورد ۹۹)

(ب) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

(پ) اگر قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن باشد، خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{4}$ است.

(ت) پرتوی که از کانون یک بیضی بر آن بتابد، موازی با قطر بزرگ بیضی بازتاب می‌یابد.

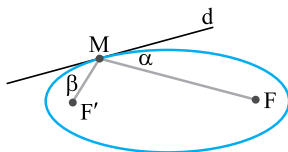
(ث) اگر M نقطه‌ای درون بیضی با کانون‌های F و F' باشد، آن‌گاه حاصل $MF + MF'$ کوچک‌تر از قطر بزرگ بیضی است.

(ج) اگر از کانون بیضی، عمودی بر قطر بزرگ آن رسم کنیم تا بیضی را در نقاط M و M' قطع کند، آن‌گاه $MM' = \frac{2b^2}{a}$ است. a و b نصف قطر بزرگ و کوچک بیضی‌اند.

(چ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $\widehat{FMF'} = 50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه

(نهایی فرورد ۱۴۰۰)

زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است.



۵۵- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید.

- (الف) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک می شود. (نهایی فرورد ۹۸، فرورد ۱۴۰۰ و مشابه فرورد ۱۴۰۱)
- (ب) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در بیضی است. (نهایی فرورد ۹۹ و دی ۱۴۰۰)
- (پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر است. (نهایی شهریور ۹۹)
- (ت) پرتوی که از کانون بیضی بر آن بتابد، بازتابش آن از می گذرد.
- (ث) اگر قطر کوچک BB' یک بیضی به کانونهای F و F' باشد، آن گاه طول BF برابر با است.
- (ج) در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ باشد، بیضی تبدیل به می شود. (نهایی شهریور ۱۴۰۰)

۵۶- در یک بیضی، نقاط A و A' دو انتهای قطر بزرگ، B و B' دو انتهای قطر کوچک و $AA' = 3FF'$ است که در آن F و F' کانونهای بیضی هستند. نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ چه قدر است؟

۵۷- طول قطر کوچک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله کانون تا نزدیک ترین رأس قطر بزرگ برابر ۲ است. طول قطر بزرگ را به دست آورید.

۵۸- اگر قطر بزرگ بیضی $2\sqrt{7}$ و قطر کوچک آن $\sqrt{7}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵۹- در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است، (نهایی شهریور ۹۸، شهریور ۹۹ و فرورد ۱۴۰۱)

(الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

(ب) مختصات کانونها (F, F')، مختصات دو سر قطر بزرگ (A, A') و دو سر قطر کوچک (B, B') را به دست آورید.

(پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

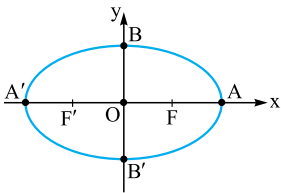
۶۰- اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله یک کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید. (نهایی فرورد ۹۹)

۶۱- اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ و فاصله کانونی آن را به دست آورید. (نهایی فرورد ۹۹)

۶۲- بیضی با مشخصات $a = 8$ و $e = \frac{1}{4}$ را به طور تقریبی رسم کنید.

۶۳- مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل، بر محورهای x و y منطبق هستند و

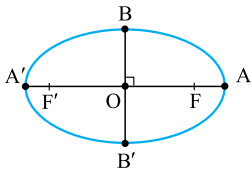
فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید. (نهایی شهریور ۹۹)



۶۴- یک سر قطر بزرگ، B یک سر قطر کوچک و F کانونی از بیضی باشد که به A نزدیک تر است. مساحت مثلثهای AFB و AF'B را بر حسب a، b و c پیدا کنید.

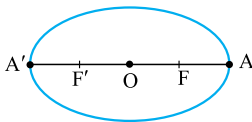
۶۵- در بیضی روبه رو، $OA = OA' = a$ ، $OB = OB' = b$ ، $OF = OF' = c$. ثابت کنید: $b^2 + c^2 = a^2$.

(نهایی فرورد ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۰)



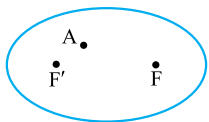
۶۶- در بیضی زیر، نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانونهای بیضی هستند. ثابت کنید

$AA'F' = AF$. (نهایی شهریور ۱۴۰۰)



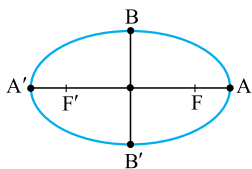
۶۷- در شکل مقابل، نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانونهای بیضی اند. ثابت کنید مجموع فواصل

نقطه A از F و F' کوچک تر از قطر بزرگ بیضی است. (نهایی شهریور ۹۸)



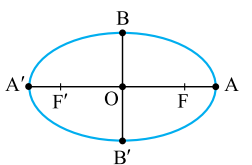
۶۸- اگر در بیضی، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $\widehat{FBF'}$ چند درجه است؟

(نهایی دی ۹۷ و دی ۱۴۰۰)



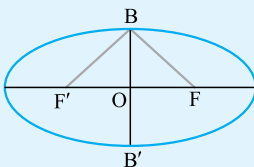
۶۹- در بیضی شکل مقابل، طول قطر بزرگ $\sqrt{2}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $\widehat{FBF'}$ چند

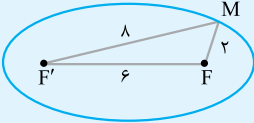
درجه است؟ (نهایی فرورد ۹۹)



آزمون جمع‌بندی

ردیف	آزمون جمع‌بندی	«رشته ریاضی و فیزیک»	مدت امتحان: ۱۶۵ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ثابت r که بر دایره‌ای ثابت $C(O, R)$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+r$ است. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت d واقع در آن صفحه به فاصله معلوم $k (k > 0)$ باشند، یک خط به موازات d است. پ) اگر صفحه‌ای تمام یال‌های یک رویه مخروطی را در یک طرف رأس قطع کند و از رأس مخروط نگذرد، مقطع حاصل دایره یا بیضی است. ت) بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت غیرواحد بر آن خط به یک فاصله باشند. ث) خط d و دایره $C(O, R)$ را در نظر بگیرید. اگر فاصله نقطه O از خط d واقع در صفحه دایره، کوچک‌تر از قطر دایره باشد، خط d با دایره C دو نقطه مشترک دارد. ج) رابطه $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 11 = 0$ معادله یک دایره است.	۱/۵			۱
۲	جاهای خالی را با عبارتهایی مناسب چنان پر کنید تا گزاره‌ای درست حاصل شود. الف) مکان هندسی، مجموعه نقاطی است که همه آن‌ها دارای یک هستند و هر نقطه که دارای آن ویژگی باشد، از آن مجموعه است. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در همان صفحه مقداری ثابت باشد، است. پ) سهمی به کانون F و خط هادی Δ را در نظر بگیرید. اگر A نقطه‌ای از صفحه باشد، طوری که فاصله A از خط Δ بیشتر از فاصله A از F باشد، A نقطه سهمی است. ت) اگر پرتوی از کانون سهمی بگذرد و بر سهمی بتابد، بازتابش آن است. ث) اگر خروج از مرکز بیضی به 1 نزدیک شود، بیضی به شبیه خواهد شد.	۱/۵			۲
۳	معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $A(1, 2)$ می‌گذرد و دو قطر آن منطبق بر خط‌های $y = x - 6$ و $2x + 3y = 2$ باشند.	۱			۳
۴	دایره‌ای از دو نقطه $A(1, 8)$ و $B(-2, 7)$ می‌گذرد و مرکز آن روی خط $y = 3x$ قرار دارد. شعاع این دایره چه قدر است؟	۱			۴
۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y + 3 = 0$ مماس باشد و مرکز آن نقطه $O(1, 1)$ باشد.	۱			۵
۶	دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $4x + 3y = 3$ و تری جدا می‌کند. طول این وتر چه قدر است؟	۱/۵			۶
۷	دایره‌ای از سه نقطه $M(0, 0)$ ، $A(1, 2)$ و $B(3, 0)$ می‌گذرد. مختصات مرکز و طول شعاع این دایره را بیابید.	۱			۷
۸	شعاع دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 + y^2 = 9$ و $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ مماس داخل و مرکز آن روی محور y ها باشد، چه قدر است؟	۱/۵			۸
۹	از نقطه M به طول 6 واقع بر محور x ها دو مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 6$ رسم کرده‌ایم. طول هر یک از مماس‌ها را پیدا کنید.	۱			۹
۱۰	در بیضی شکل مقابل، قطر کوچک $\sqrt{3}$ برابر فاصله کانونی آن است. اندازه زاویه $\angle FBF'$ را مشخص کنید.	۱			۱۰



۱۱	در شکل زیر، نقاط F و F' کانون‌های بیضی و نقطه M روی بیضی است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.
	
۱۲	در یک بیضی با کانون‌های F و F' نقطه M نقطه‌ای روی بیضی است. اگر طول قطر بزرگ بیضی 20° و فاصله M تا مرکز بیضی برابر 8 و $MF \perp MF'$ باشد، طول MF چه مقداری می‌تواند باشد؟
۱۳	اگر F و F' کانون‌های یک بیضی و نقاط M و N روی بیضی ولی در دو طرف محور کانونی باشند، طوری که $MF' = NF$ ، نشان دهید $MF' \parallel NF$.
۱۴	اگر $S(2,1)$ رأس سهمی و خط $y = 3$ هادی آن باشد، معادله سهمی را به دست آورید.
۱۵	معادله یک سهمی به صورت $y^2 - 6y + 8x + 1 = 0$ است. مختصات کانون، رأس سهمی و نیز معادله خط هادی آن را پیدا کرده و نمودار تقریبی آن را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.
۱۶	سهمی با رأس S ، کانون F و خط هادی Δ مفروض است. بیضی‌ای که یک کانون آن منطبق بر F و کانون دیگر آن منطبق بر S و مماس بر خط Δ باشد، در نظر بگیرید. خروج از مرکز این بیضی چه قدر است؟
۱۷	بیضی با کانون‌های F و F' که طول قطر بزرگ آن $2a$ باشد، در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز مرکز بیضی و شعاع a رسم کرده‌ایم. اگر از F عمودی بر محور کانونی بیضی رسم کنیم تا این دایره را در نقطه‌های p و p' قطع کند، نشان دهید $pp' = 2b$ (طول قطر کوچک بیضی است).
۲۰	مجموع نمرات



برای دانلود حل ویدیوئی آزمون‌های جمع‌بندی، QRcode روبه‌رو را اسکن کنید.



حاصل ضرب خارجی دو بردار

بردارهای $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ را در نظر می‌گیریم. ضرب خارجی \vec{a} در \vec{b} ، برداری به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

که آن را با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش می‌دهند.

برای این که بتوانیم ضرب خارجی را ساده‌تر محاسبه کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول: در یک سطر، عنصرهای بردار اول و در سطر بعدی عنصرهای بردار دوم را زیر آن می‌نویسیم. (شکل زیر)

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

مرحله دوم: دو ستون اول را تکرار می‌کنیم:

مرحله سوم: برای پیدا کردن اولین عنصر بردار حاصل ضرب خارجی این دو بردار، ستون اول را کنار می‌گذاریم و درمیان دو ستون بعدی را به دست می‌آوریم.

ستون اول حذف

$$\begin{array}{cccc} \boxed{a_1} & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \boxed{b_1} & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_2 b_3 - a_3 b_2$

مرحله چهارم: برای پیدا کردن دومین عنصر بردار حاصل ضرب خارجی، ستون دوم را کنار می‌گذاریم و درمیان دو ستون بعدی را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & \boxed{a_2} & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & \boxed{b_2} & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_3 b_1 - a_1 b_3$

مرحله پنجم: برای پیدا کردن سومین عنصر نیز ستون سوم را حذف و درمیان دو ستون بعدی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \boxed{a_3} & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & \boxed{b_3} & b_1 & b_2 \end{array}$$

دترمینان این دو ستون را پیدا می‌کنیم $\rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

قضیه: ثابت کنید $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ که θ زاویه بین \vec{a} و \vec{b} است.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

اثبات: فرض کنیم $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، آن‌گاه:

از طرفی چون $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ ، پس:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

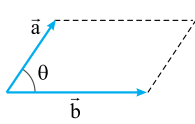
$$= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

نتیجه مهم: از هندسه (۲) می دانیم مساحت یک متوازی الاضلاع که طول اضلاع آن a و b و زاویه بین دو ضلع آن θ باشد برابر $S = ab \sin \theta$ است، بنابراین از قضیه فوق چنین نتیجه می شود که: اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار، برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که با آن دو بردار ساخته می شود.



مثال: بردارهای $\vec{a} = (3, 2, -1)$ و $\vec{b} = (1, 2, 3)$ را در نظر بگیرید. مساحت متوازی الاضلاعی را که با این دو بردار ساخته می شود، پیدا کنید.

پاسخ: بنا بر نتیجه ای که در بالا بیان شد، مساحت متوازی الاضلاع حاصل از دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر است با اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ ؛ به بیان دیگر:

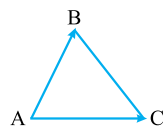
ابتدا بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ را پیدا می کنیم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, 2, -1) \times (1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (8, -10, 4)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{8^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{5}$$

بنابراین:



مثال: اگر $A(1, 2, 3)$ ، $B(2, -1, 4)$ و $C(3, 0, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت این مثلث را پیدا کنید.

پاسخ: اگر بردارهای \vec{AB} و \vec{AC} را ضرب خارجی کنیم، آن گاه بنا بر نتیجه فوق، اندازه بردار حاصل ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی الاضلاع حاصل از این دو بردار و نصف آن، برابر مساحت مثلث است.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2 - 1, -1 - 2, 4 - 3) = (1, -3, 1)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (3 - 1, 0 - 2, 1 - 3) = (2, -2, -2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (1, -3, 1) \times (2, -2, -2) = (8, 4, 4)$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |(8, 4, 4)| = |4(2, 1, 1)| = 4|(2, 1, 1)| = 4\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(4\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

خواص ضرب خارجی

فرض کنید $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. در این صورت خواص زیر برای آن ها برقرار است:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

ضرب خارجی دو بردار در حالت کلی دارای خاصیت جابه جایی نیست.

مثال: اگر $\vec{a} = (2, 1, -3)$ و $\vec{b} = (4, -1, 2)$ ، آن گاه $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{b} \times \vec{a}$ را به دست آورید و سپس آن ها را با هم مقایسه کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1) - 4 - (2 \cdot 2 - 12) + (-2 - 3) = -2 - 4 - 4 + 10 - 5 = -6$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2, 1, -3) \times (4, -1, 2) = (-1, -16, -6)$$

به همین ترتیب حاصل $\vec{b} \times \vec{a}$ را به دست می آوریم که به صورت زیر است:

$$\vec{b} \times \vec{a} = (4, -1, 2) \times (2, 1, -3) = (1, 16, 6)$$

ملاحظه می شود که دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{b} \times \vec{a}$ ، قرینه یکدیگرند.

$$r\vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r\vec{b}$$

اگر r عددی حقیقی باشد، آن گاه داریم:

اگر \vec{a} و \vec{b} دو بردار ناصفر و ناموازی باشند، آن گاه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر یک از دو بردار \vec{a} و \vec{b} عمود است.

نکته

با توجه به خاصیت (۳) می توان نتیجه گرفت که چون $\vec{a} \times \vec{b}$ بر هر یک از بردارهای \vec{a} و \vec{b} عمود است، پس $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ و $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ یعنی: «ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آن دو بردار».

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

اثبات:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

پاسخ آزمون جمع بندی

۱- الف) نادرست؛ (شاید بعضی از درایه‌های قطر اصلی صفر باشند).

ب) درست

پ) نادرست؛ (شاید مربعی باشند ولی هم مرتبه نباشند).

ت) درست

ث) درست؛ (زیرا $A(-A^T) = I$ ، پس $A^{-1} = -A^T$)

ج) نادرست؛ (زیرا در ماتریس‌ها، قاعده حذف برقرار نیست).

۲- الف) غیرواقع بر قطر اصلی - واقع بر قطر اصلی

ب) همان مرتبه I (پ)

ت) مخالف صفر

ث) حاصل ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن

۳-

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

۴- فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، پس باید داشته باشیم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - 4c & 2b - 4d \\ a - 2c & b - 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + b & -4a - 2b \\ 2c + d & -4c - 2d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4c = 2a + b \Rightarrow b = -4c \\ 2b - 4d = -4a - 2b \Rightarrow d = b + a \\ a - 2c = 2c + d \Rightarrow 4c = a - d \\ b - 2d = -4c - 2d \Rightarrow b = -4c \end{cases}$$

مقادیر a, b, c, d باید به گونه‌ای انتخاب شوند که در دو رابطه $d = b + a$

و $b = -4c$ صدق کنند. به ازای مقادیر دلخواه a و b ، مقادیری برای c

و d به دست می‌آیند و مسئله بی‌شمار جواب دارد. به عنوان مثال؛ اگر

$a = 5$ و $b = -4$ باشد، آن‌گاه $c = +1$ و $d = 1$ خواهد بود؛ یعنی

$$B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ یکی از ماتریس‌های مورد نظر است.}$$

۵- تمام درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس A ، صفر هستند. بنابر

مطالب متن درس، دترمینان آن برابر با حاصل ضرب درایه‌های قطر

اصلی است. پس $|A| = 3$ و به سادگی معلوم می‌شود $|B| = -5$ و

$$|I_3| = 1 \text{ در نتیجه:}$$

$$|A \times B| - |2I_3| = |A| \times |B| - 3^3 |I_3| \\ = 3 \times (-5) - 27 \times 1 = -42$$

۶-

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + 2 & 2 + a \\ ax + 6 & x + 3a \end{bmatrix}$$

ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر

باشند. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} 2 + a = 0 \\ ax + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

۷- دو ماتریس هم مرتبه زمانی برابرند که درایه‌های نظیر برابر باشند:

$$\begin{cases} y - 1 = x^2 \xrightarrow{x=2} y = 5 \\ x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2z = y \xrightarrow{y=5} z = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x + 2y + 4z = 2 + 2 \times 5 + 4 \times \frac{5}{2} = 22$$

۸- ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 3I$$

$$A^5 = A \times A^4 = A \times (A^2)^2 = A \times (3I)^2 = A \times 9I^2 = 9A$$

$$A^8 = (A^2)^4 = (3I)^4 = 3^4 I^4 = 81I$$

۹-

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

باتوجه به ضابطهٔ a_{ij} داریم:

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{9} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

۱۰- از این‌که $A^T = A$ است نتیجه می‌شود:

$$A^T = A^T \times A \xrightarrow{A^T=A} A^T = A \times A = A^2$$

$$\xrightarrow{A^T=A} A^2 = A$$

چون A و I تعویض پذیرند، پس اتحادهای جبری در مورد این دو ماتریس

برقرار است و داریم:

$$(A + I)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3 \\ = A^3 + 3A^2 + 3A + I = A + 2A + 3A + I = 7A + I$$

۱۱- چون $A^T = A$ ، پس $A^n = A$ و هم چنین $B^n = B$ و چون

بنا به فرض ماتریس‌های A و B تعویض پذیرند، پس $AB = BA$.

چون A و B تعویض پذیرند، پس اتحادهای جبری برقرار است:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\ = A + 3AB + 3AB + B = A + 6AB + B$$

۱۲-

$$\text{ماتریس ضرایب } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \times (-1) - 4 \times 5} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix} = -\frac{1}{23} \begin{bmatrix} -69 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

و چون $OBPH$ مستطیل است، پس $OH = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

$$OH = OA + AH \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}a = a + AH \Rightarrow AH = \frac{(2\sqrt{3}-3)a}{3} \quad (1)$$

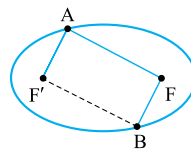
به سادگی معلوم می‌شود $\angle BFO = 30^\circ$ ، پس $OB = \frac{1}{2}BF$ ؛ یعنی $b = \frac{1}{2}a$ از طرفی:

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$FA = OA - OF = a - c = a - \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{(2-\sqrt{3})a}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{\frac{(2\sqrt{3}-3)a}{3}}{\frac{(2-\sqrt{3})a}{2}} = \frac{2(2\sqrt{3}-3)}{3(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

-۷۹



$A \Rightarrow AF + AF' = 2a$ روی بیضی است.
 $B \Rightarrow BF + BF' = 2a$ روی بیضی است.
 بنا به فرض $BF = AF'$
 $\Rightarrow AF = BF'$

چون در چهارضلعی $AFBF'$ اضلاع روبه‌رو دویله‌دو برابرند، پس این چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه BF' و AF موازی هستند.

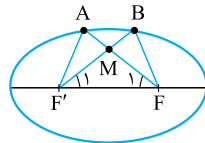
-۸۰ چون A روی بیضی است، پس: $AF + AF' = 2a$ (۱)

و از آن جا که B هم روی بیضی است، پس: $BF + BF' = 2a$ (۲)

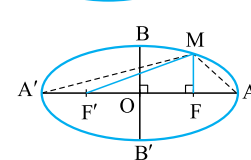
$$(1), (2) \Rightarrow AF + AF' = BF + BF'$$

$$\xrightarrow{AF'=BF} AF = BF'$$

اکنون دو مثلث AFF' و BFF' به حالت برابری سه ضلع، همنهشت هستند، پس اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابرند، در نتیجه $\hat{F}_1 = \hat{F}'_1$ و بنابراین مثلث MFF' در رأس M متساوی‌الساقین است.



چون M روی بیضی است، پس:
 $MF + MF' = 2a$ (۱)
 در مثلث قائم‌الزاویه MFF' داریم:
 $MF'^2 - MF^2 = FF'^2$



-۸۱ چون M روی بیضی است، پس:

$$MF + MF' = 2a \quad (1)$$

در مثلث قائم‌الزاویه MFF' داریم:

$$MF'^2 - MF^2 = FF'^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(MF' + MF)}_{2a} (MF' - MF) = 4c^2$$

$$\Rightarrow MF' - MF = \frac{4c^2}{2a} \xrightarrow{(1)} (2a - MF) - MF = \frac{4c^2}{2a}$$

$$\Rightarrow 2MF = 2a - \frac{4c^2}{2a} = \frac{2(a^2 - c^2)}{a} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow MF = \frac{b^2}{a}$$

$$S_{MFF'} = \frac{1}{2} MF \times FF' = \frac{1}{2} \times \frac{b^2}{a} \times 2c = b^2 \times \frac{c}{a} = b^2 e$$

$$S_{MAA'} = \frac{1}{2} AA' \times MF = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{b^2}{a} = b^2 \quad \text{هم‌چنین:}$$

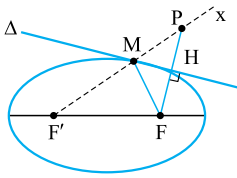
$$S_{MAF'} = \frac{1}{2} AF' \times MF = \frac{1}{2} (a+c) \frac{b^2}{a}$$

و نیز:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a} + \frac{c}{a} \right) b^2 = \frac{1}{2} (1+e) b^2$$

-۸۲ الف) می‌دانیم مماس بر بیضی در نقطه M ، نیمساز زاویه $\angle MF$ و امتداد MF' است، پس Δ نیمساز زاویه $\angle FMX$ می‌باشد.

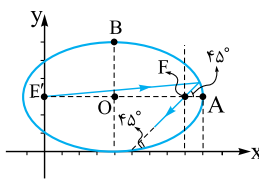
اگر امتداد عمودی که از F بر Δ رسم می‌شود، MX را در P قطع کند، چون در مثلث MPF ، پاره‌خط MH هم ارتفاع و هم نیمساز



است، پس عمودمنصف نیز می‌باشد، در نتیجه نقطه P ، بازتاب نقطه F نسبت به خط Δ می‌باشد، بنابراین M, F', P بر یک راستا هستند.

ب) زیرا M روی بیضی است.

$$PF' = \underbrace{PM}_{=MF} + MF' = MF + MF' = 2a$$



-۸۳ واضح است که مختصات

مرکز بیضی $O(4,3)$ است. از

طرفی $a = OA = 9 - 4 = 5$ و

در بیضی $b = OB = 6 - 3 = 3$

رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است، پس

$$\text{داریم: } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

در نتیجه مختصات کانون F به صورت $F(4+4, 3)$ یا $F(8, 3)$ می‌باشد.

بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی، پرتویی که از یک کانون بیضی بر

آن بتابد، بازتابش آن از کانون دیگر می‌گذرد، پس نقطه F روی

پرتو بازتابش قرار دارد. چون پرتو بازتابش با AA' زاویه 45° درجه

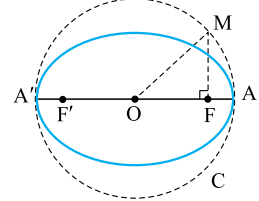
می‌سازد، پس بنا بر قضیه خطوط موازی و مورب، پرتو بازتابش با

جهت مثبت محور x ها نیز زاویه 45° درجه تشکیل می‌دهد و در نتیجه

شیب این خط $m = \tan 45^\circ = 1$ است. اکنون معادله پرتو بازتابش

$$y - 3 = 1 \times (x - 8) \Rightarrow y = x - 5$$

را پیدا می‌کنیم:



-۸۴ چون قطر دایره برابر $AA' = 2a$ است، پس شعاع آن a می‌باشد و در

نتیجه $OM = a$. از طرفی $OF = c$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه OMF بنا

بر رابطه فیثاغورس داریم:

$$MF^2 + OF^2 = OM^2 \Rightarrow MF^2 + c^2 = a^2$$

$$\Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

یعنی MF نصف قطر کوچک بیضی است.

-۸۵ از O به M وصل می‌کنیم، پس

$OM = a$ و $OF = c$. در مثلث

قائم‌الزاویه OMF داریم:

$$MF^2 = OM^2 - OF^2$$

$$= a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

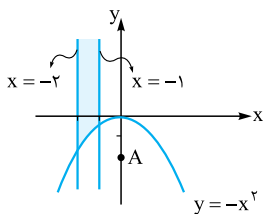
اکنون در مثلث قائم‌الزاویه MFF' داریم:

$$MF'^2 = MF^2 + FF'^2 = b^2 + 4c^2$$

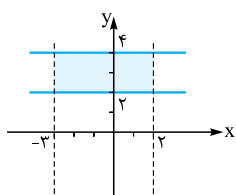
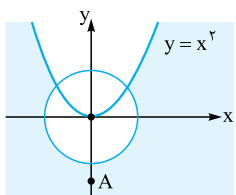
$$= \underbrace{b^2 + c^2}_{=a^2} + 3c^2 = a^2 + 3c^2 \Rightarrow MF' = \sqrt{a^2 + 3c^2}$$

پاسخ سؤال‌های امتحانی

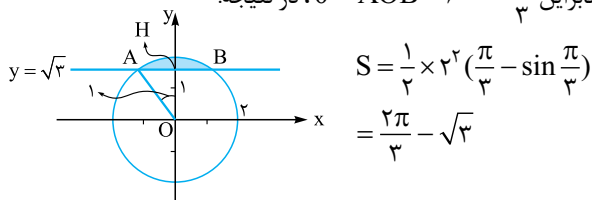
ب) ابتدا نمودار $x^2 + y = 0$ را که معادل با $y = -x^2$ است، رسم می‌کنیم و نقطه $A(0, -2)$ را در نامساوی $x^2 + y \geq 0$ می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود $-2 \geq 0$ که نادرست است، پس قسمتی از صفحه که بیرون سهمی قرار دارد جواب نامعادله می‌باشد. اینک محدوده $-2 \leq x \leq -1$ که بین دو خط $x = -2$ و $x = -1$ است را مشخص می‌کنیم. اشتراک این دو محدوده آن‌ها جواب مسئله می‌باشد که در شکل، با رنگ مشخص شده است.



پ) همانند قسمت (ب) ابتدا نمودار $y = x^2$ را رسم می‌کنیم و نقطه $A(0, -2)$ را آزمایش می‌کنیم. مشاهده می‌شود که در نامساوی اول صدق می‌کند، پس نقاط بیرون سهمی در این نامعادله صدق می‌کنند حالا نمودار $x^2 = 1 - y^2$ را که معادل با $x^2 + y^2 = 1$ است، رسم می‌کنیم که یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۱ است. نقطه A در نامساوی دوم صدق می‌کند، پس نقاط بیرون یا روی دایره در این نامعادله صدق می‌کنند. اشتراک این دو ناحیه جواب مسئله است. در این جا محدوده جواب با رنگ مشخص شده است.



ب) مساحت محدودشده، قطعه‌ای از دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است. می‌دانیم مساحت قطعه‌ای از دایره که مقابل به زاویه مرکزی θ رادیان باشد از رابطه $S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$ به دست می‌آید. با توجه به شکل، چون $OA = 2$ و $OH = \sqrt{3}$ است، پس $\hat{O}_1 = 30^\circ$ ، بنابراین $\theta = \hat{AOB} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ در نتیجه:

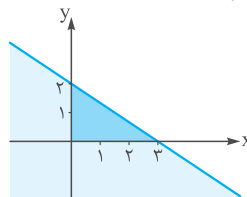


۶- الف) درست؛ (هر نقطه با ارتفاع صفر، روی صفحه XOY است و برعکس).

ب) درست؛ (هر نقطه با طول صفر، روی صفحه YOZ است و برعکس).

۱- الف) $1 < m < 2$ ، در ربع چهارم مختصات، مؤلفه اول (X) مثبت و مؤلفه دوم (Y) منفی است، پس داریم:

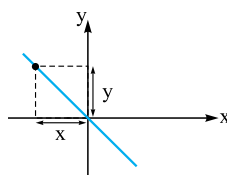
$$\left. \begin{aligned} m-1 > 0 &\Rightarrow m > 1 \\ m-2 < 0 &\Rightarrow m < 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < m < 2$$



ب) ۳، ابتدا رابطه $2x + 3y < 6$ را رسم می‌کنیم. برای این کار نامعادله را به معادله $2x + 3y = 6$ تبدیل می‌کنیم:

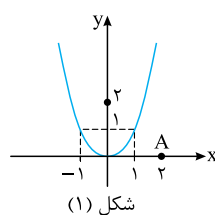
نقطه دلخواه $(0, 0)$ در نامعادله $2x + 3y < 6$ صدق می‌کند. پس ناحیه مطلوب زیر خط $2x + 3y = 6$ است و مساحت بخشی از آن که در ربع اول قرار دارد، برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

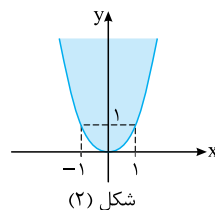


۲- هر نقطه روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم از دو محور X و Y به یک فاصله است ولی با توجه به شکل، این دو مقدار، مختلف‌العلامه می‌باشند، پس معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است.

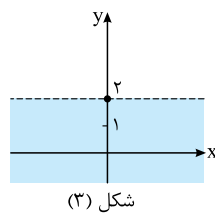
۳- نمودار $x^2 = y$ به شکل مقابل است. (شکل ۱)



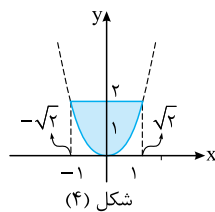
نقطه $A(2, 0)$ را در نامعادله $x^2 \leq y$ آزمایش می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت $2^2 \leq 0$ که نادرست است، پس نقاط درون سهمی و روی آن جواب‌های این نامعادله هستند (شکل ۲).



چون باید $y \leq 2$ باشد، پس تمام نقاط زیر خط $y = 2$ و روی آن جواب‌های این معادله هستند (شکل ۳).

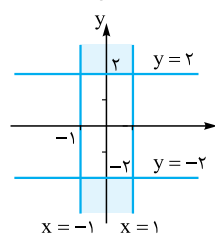


اشتراک شکل‌های (۲) و (۳) جواب‌های مسئله هستند (شکل ۴).



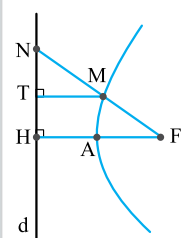
۴- الف) $y^2 \geq 4 \equiv y \geq 2$ یا $y \leq -2$
 $x^2 \leq 1 \equiv -1 \leq x \leq 1$

در شکل مقابل، اشتراک بین دو ناحیه به صورت رنگی نمایش داده شده و جواب مسئله می‌باشد.



ردیف	امتحان شماره ۱	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	هندسه ۳	رشته ریاضی و فیزیک	نمونه امتحان نیمسال اول
نمره	Kheilisabz.com				
۱	ماتریسی از مرتبه 3×4 بنویسید طوری که برای هر i و j ، رابطه $z = 2i - j$ برقرار باشد.	۰/۷۵			
۲	ماتریسی اسکالر از مرتبه ۴ بنویسید که مجموع تمام درایه‌های آن ۳۶ باشد.	۱			
۳	با فرض این که X ماتریسی 2×2 باشد، از رابطه مقابل، ماتریس X را مشخص کنید:	۱/۲۵			
					$2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
۴	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $A^2 - 2A + 3I$ را پیدا کنید.	۱			
۵	ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت‌های $a_{ij} = \begin{cases} 2 & : i \neq j \\ i + j & : i = j \end{cases}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i + j & : i \neq j \\ i - 1 & : i = j \end{cases}$ تعریف شده‌اند. حاصل $B \times A$ را مشخص کنید.	۱/۲۵			
۶	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، آن گاه ماتریسی مخالف B چنان بیابید که رابطه $AB = AC$ برقرار باشد.	۱			
۷	اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x + 3y & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & x^2 + 4y \\ 2 & y - x \end{bmatrix}$ برابر باشند، آن گاه x و y را پیدا کنید.	۰/۷۵			
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$ و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد، ماتریس‌های AB و BA را تشکیل دهید و نتیجه حاصل را بیان کنید.	۱			
۹	اگر A و B دو ماتریس قطری از مرتبه ۳ باشند، حاصل $A \times B$ را تشکیل دهید و نتیجه حاصل را بیان کنید. آیا AB و BA برابر هستند؟	۱			
۱۰	اگر $A = [2]$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه حاصل $ A + B + C $ را به دست آورید.	۱			
۱۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = [3 \quad -1 \quad 1]$ ، آن گاه حاصل $ AB $ را پیدا کنید. (دترمینان AB را پیدا کنید).	۰/۷۵			
۱۲	دستگاه معادلات $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. بدون حل دستگاه، بررسی کنید که این دستگاه دارای جواب است؛ سپس با استفاده از ماتریس وارون، آن را حل کنید.	۱/۲۵			
۱۳	اگر صفحه‌ای بر محور رویه مخروطی عمود نباشد و از رأس رویه نیز نگذرد و با هیچ‌یک از یال‌های آن موازی نباشد، مقطع آن صفحه با رویه مخروطی چه شکلی می‌تواند باشد؟	۰/۷۵			
۱۴	مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌اش از خط d ، واقع در همان صفحه، برابر r باشد ($r > 0$) چیست؟ شکل مناسبی رسم کنید.	۱			
۱۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $A(1, -2)$ بگذرد و بر دو محور مختصات، مماس باشد.	۱/۵			
۱۶	وضعیت نسبی خط $4x - 3y = 0$ با دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ را مشخص کنید.	۱/۲۵			
۱۷	معادله دایره محیطی مثلثی را که مختصات سه رأس آن $A(2, 1)$ ، $B(3, 2)$ و $O(0, 0)$ باشند، پیدا کنید. سپس معادله مماس بر این دایره را در نقطه A پیدا کنید.	۲			
۱۸	معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(-2, 4)$ و $B(4, 6)$ بگذرد و معادله یکی از قطرهای آن $x + y = 4$ باشد.	۱/۵			
جمع نمرات	۲۰				

هنر سه ۳		رشته ریاضی و فیزیک		نمونه امتحان نیم سال دوم	
ردیف	امتحان شماره ۳	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	نهایی خرداد ماه ۱۴۰۱	Kheilisabz.com	نمره
۱	عبارت‌های زیر را کامل کنید. الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با است. ب) اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به نزدیک‌تر می‌شود. پ) نقطه $A(1, -2)$ در دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ قرار دارد. ت) اگر سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر است.				
۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. الف) اگر A یک ماتریس 3×3 و $ A = 5$ باشد، آن‌گاه $ 2A = 40$ است. ب) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است. پ) در شکل روبه‌رو، اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد و زاویه $\widehat{FMF'} = 50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه زاویه $\alpha = \beta = 60^\circ$ است. ت) برای دو بردار واحد \vec{i} و \vec{j} حاصل ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{O}$ است.				۱/۵
۳	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.				۱
۴	ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $A = \begin{cases} i+j & i=j \\ j & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد: الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید. ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.				۱/۲۵
۵	دستگاه $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.				۱/۲۵
۶	نقاط A ، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).				۱/۵
۷	معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(1, -1)$ و بر خط $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.				۱
۸	در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرهای برابر ۱۰ و ۶ است: الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید. ب) مختصات کانون‌ها (F', F) ، مختصات دو سر قطر بزرگ (A', A) و دو سر قطر کوچک (B', B) را به دست آورید. پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.				۱/۵
۹	الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$ را بیابید. ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.				۱/۵
۱۰	در شکل روبه‌رو، سهمی با رأس A ، کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$				۱/۲۵
۱۱	شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^2 \leq y \leq 2$ را رسم کنید.				۰/۵



پاسخنامه تشریحی

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 10 - MF \quad (ب) \quad (۰/۲۵)$$

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow MF^2 + (10 - MF)^2 = 8^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow MF = 5 - \sqrt{7} \quad (۰/۲۵)$$

۱۰- الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $a = 4$ (۰/۲۵)

دهانه سهمی رو به پایین است و معادله آن برابر است با:

$$(x - 2)^2 = -4(4)(y - 3) \quad (۰/۵)$$

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با $F = (2, -1)$ (۰/۵)

۱۱- اگر قطر دهانه دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصله کانونی برابر $a = \frac{4b^2}{16h}$ (۰/۲۵) است.

$h = 9$, $2b = 60$ را با جای گذاری در رابطه فوق داریم:

$$a = \frac{(2b)(2b)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25 \quad (۰/۵)$$

اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{b^2}{4h} = \frac{(30)^2}{4(9)} = 25$ (۰/۷۵) نوشته شود درست است.

۱۲- الف) $b = -3$ (۰/۵) ب) محور Z ها (۰/۵)

پ) نقطه $A = (0, 2, 3)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-2, 4, 0)$ (۰/۲۵)

-۱۳

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6) \quad (۰/۵)$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49} (2, -3, 6) \quad (۰/۷۵)$$

-۱۴

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{O}|^2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow 1 + 4 + 9 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = -7 \quad (۰/۲۵)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{O} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{O}| \quad (۰/۲۵) \quad -۱۵$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0} \sin \theta = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \vee \theta = \pi \quad (۰/۲۵) \quad \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \quad (۰/۲۵)$$

۱۶- الف) برداری عمود بر دو بردار $2\vec{b}$ و \vec{c} برابر است با:

$$(-2\vec{b}) \times \vec{c} \quad (۰/۲۵) = (2, -2, 0) \quad (۰/۲۵) \times (2, 1, -2)$$

$$= (4, 4, 6) \quad (۰/۵)$$

ب) حجم متوازی السطوح تولید شده توسط سه بردار \vec{a} , \vec{b} و \vec{c} برابر است با:

$$|(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| \quad (۰/۲۵) = |(2, 3, 1) \cdot (-2, -2, -3)| = 13 \quad (۰/۲۵)$$

ب) خط (۰/۲۵)

۱- الف) ۸ (۰/۲۵)

ت) ۶ (۰/۲۵)

پ) دایره (۰/۲۵)

ب) نادرست (۰/۲۵)

۲- الف) درست (۰/۲۵)

ت) نادرست (۰/۲۵)

پ) درست (۰/۲۵)

-۳

$$\begin{cases} m - 2 = 0 \\ n + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 9 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$|2A| = (|A|^2 + 4) \quad (۰/۵) \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \quad (۰/۲۵) \quad -۴$$

$$\Rightarrow |A| = 2 \quad (۰/۲۵)$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (۰/۲۵) = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3+8} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۰/۵) \quad -۵$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

۶- فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r = \frac{|2(2) + 4(1) + 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{15}{5} = 3 \quad (۰/۵)$$

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9 \quad (۰/۵) \quad \text{معادله دایره‌ای برابر است با:}$$

۷- مرکز و شعاع دایره:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

برابر است با $O' = (3, 1)$, $r' = 1$ (۰/۵)

$$\text{فاصله دو مرکز برابر: } d = OO' = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10} \quad (۰/۵)$$

$$d > r + r' = 2 \quad (۰/۲۵)$$

دو دایره بیرون یکدیگرند. (متخارج‌اند) (۰/۲۵)

۸- نقطه B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد در نتیجه:

$$BF = BF' \quad (۰/۲۵) \quad (۱)$$

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$(۰/۲۵) \quad BF + BF' = 2a \xrightarrow{(۱)} BF = BF' = a$$

بنا به رابطه فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$(۰/۲۵) \quad OF^2 + OB^2 = BF^2 \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^2 + b^2 = a^2$$

$$\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \quad (۰/۲۵) \quad -۹ \quad \text{الف)}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \quad (۰/۲۵)$$

در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع $FF' = 4$ $MO = \frac{1}{2} FF'$ نصف

ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۲۵)